ISBN:1858-1382

J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 6, No.2, 86-91, Januari 2010

Pembinaan Olimpiade Matematika

Jeffry Kusuma*

Abstrak

Pembinaan olimpiade matematika dewasa ini sangat gencar dilakukan mulai dari tingkat sekolah, kecamatan, kota, propinsi serta nasional. Akan tetapi masih sangat sedikit prestasi yang diperoleh dibandingkan dengan usaha yang dilakukan di sulsel. Tingkat kemampuan siswa yang bagaimana dan upaya apa saja yang harus dilakukan dalam meningkatkan prestasi olimpiade matematika di Sulsel didiskusikan dalam tulisan ini.

Kata Kunci: *Operator, differensial, derivatif, ideal, prim.*

1. Pendahuluan

Olimpiade tidak lain dari bentuk perlombaan. Olimpiade Matematika merupakan perlombaan Matematika. Banyak organisasi yang menyelenggarakan olimpiade matematika seperti LOPI (Lembaga Olimpiade Matematika Indonesia), APMO (Asian Pasific Mathematics Olimpiad), IMO (International Mathematics Olimpiad) yang merupakan organisasi yang menyelenggarakan perlombaan Matematika tingkat dunia.

Tujuan dari olimpiade matematika antara lain menemukan, mendorong, menantang siswa SMU yang berbakat matematika, memupuk hubungan persahabatan internasional antara siswa dan guru, pertukaran informasi tentang silabi dan praktek pendidikan di seluruh dunia.

Tahapan seleksi olimpiade dan pembinaan peserta olimpiade di Indonesia terdiri dari 5 (lima) tahap yakni:

1. Seleksi tingkat kabupaten/kota
   Dari pengalaman tahun tahun sebelumnya, seleksi ini menggunakan 20 soal yang masing masing terdiri dari 10 soal pilihan ganda dan 10 soal isian singkat. Waktu yang disediakan untuk mengerjakan ke 20 soal tersebut adalah 90 menit.
2. Seleksi tingkat propinsi
   Juga dari pengalaman tahun sebelumnya, seleksi ini terdiri dari 2 bagian. Bagian pertama, terdiri dari 20 soal isian dengan waktu yang tersedia 90 menit. Test bagian kedua, terdiri dari 5 soal isian dengan waktu yang tersedia 120 menit.
3. Pembinaan di tingkat daerah
4. Seleksi tingkat nasional
   Seleksi tingkat nasional terdiri dari 4 soal isian pada hari pertama dengan waktu 180 menit dan 4 soal isian pada hari kedua dengan waktu 180 menit.
5. Pembinaan tahap pertama
6. Pembinaan tahap kedua/Pembinaan khusus

Untuk sukses berjalan menuju ke olimpiade matematika, yang harus dipunyai seseorang peserta didik adalah; ketekunan, pemahamam konsep, kreativitas, wawasan yang luas dan komunikatif. Ketekunan merupakan syarat mutlak yang harus dipunyai. Sering kali soal soal yang diujikan dalam olimpiade terlihat sangat sulit. Untuk peserta didik yang tidak tekun, soal

* *Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin*

tersebut langsung akan ditinggalkan dengan sangat segera dan mengakibatkan kegagalan. Pemahaman konsep merupakan syarat yang tidak dapat ditawar. Pemahaman konsep yang mendalam akan sangat membantu dalam menganalisa persoalan. Kreativitas berpikir berperan dalam membantu memecahkan persoalan yang diujikan. Wawasan yang luas memungkinkan berpikir berbagai metode dan teknik yang dapat diterapkan menyelesaikan persoalan. Komunikatif akan sangat membantu tim juri dalam mengoreksi atau mengerti cara berpikir peserta didik secara tertulis.

2. Materi Olimpiade

Materi yang diujikan atau dilombakan dalam olimpiade matematika terdiri dari beberapa cabang matematika antara lain; teori bilangan, aljabar, geometri dan kombinatorik. Tidak banyak perbedaan cabang matematika diantara materi olimpiade tingkat SMP dan SMA. Perbedaan utama hanya terletak pada kedalaman penguasaan konsep dan materi.

Untuk dapat lebih mengerti dan mendalami tingkat penguasaan peserta didik, materi yang dilombakan dan juga dalam membantu pendidik memutuskan akan mutu peserta didik yang dapat mengikuti olimpiade, marilah meninjau salah satu bidang matematika saja yaitu aljabar.

Contoh 1.

Buktikanlah bahwa $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Solusi:
Dengan memperhatikan bentuk kuadrat yang senantiasa positif, maka selalu berlaku

$$(a - b)^2 \geq 0,$$

atau

$$a^2 + b^2 - 2ab \geq 0,$$

kemudian pindahkan nilai $2ab$ ke ruas kanan persamaan maka terbuktilah pertidaksamaan di atas. Contoh dan solusi pertidaksamaan di atas tentunya mungkin muncul dalam soal soal olimpiade dengan tingkat SMP mengingat tingkat kesulitan dan penguasaan bilangan kuadrat. Penguasaan teorema yang mengatakan kuadrat dari bilangan Riil senantiasa positif atau nol tentunya harus telah mendarah daging. Untuk tingkat SMA, soal diatas tentunya terlalu mudah. Ditingkat SMA, variasi dari soal diatas dengan tingkat kesulitan yang relatif sama dapat saja muncul pada soal-soal penyisihan daerah yakni pada saat yang sangat awal seleksi peserta olimpiade. Pada tingkat peserta olimpiade tingkat provinsi dan sederajatnya, penguasaan rataan aritmetika (AM), rataan geometri (GM), dan rataan harmonik (HM) beserta hubungan dan perluasan sifat sifat rataannya tentu telah harus dikuasai peserta, katakanlah mengenal teorema berikut.

Teorema 1.

Bila a, b, c bilangan Riil positif maka rataan Aritmetika (AM) adalah $\frac{a+b+c}{3}$, rataan Geometri (GM) adalah $\sqrt[3]{abc}$ dan rataan Harmonik (HM) adalah $\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$ dan memenuhi hubungan AM $\geq$ GM $\geq$ HM atau $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \geq \frac{9}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$.

Penguasaan konsep dan teorema diatas beserta perluasaannya mutlak dikuasai peserta didik untuk berhasil sampai pada seleksi tingkat provinsi. Kreativitas dari peserta didiklah yang akan menolong peserta didik menyelesaikan persoalan dengan tingkat kesulitan sederajat yang diberikan.

Contoh 2. (Soal Balkan Mathematics Olympiad, Belgrade, Yugoslavia, May, 2001)

Bila a, b, c bilangan Riil positif dan $a + b + c \geq abc$, buktikanlah bahwa $a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3}abc$.

Solusi:
Dengan menggunakan Rataan Aritmetika (AM) dan Rataan Geometri (GM) dan hubungan AM ≥ GM diperoleh

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}.$$

Pangkat tigakan kedua ruas,

$$(a + b + c)[a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)] \geq 27abc.$$

Gunakan sifat, $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$, maka persamaan terakhir dapat ditulis

$$(a + b + c)[a^2 + b^2 + c^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2)] \geq 27abc,$$
$$3(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 27abc.$$

Kalikan kedua ruas persamaan dengan $a + b + c \geq abc$ maka

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c)^2 \geq 9a^2b^2c^2,$$

atau

$$(a^2 + b^2 + c^2)[a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)] \geq 9a^2b^2c^2.$$

Gunakan lagi sifat $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$, akhirnya diperoleh

$$3(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 9a^2b^2c^2,$$

atau

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3}abc.$$

Pada contoh dan solusi di atas, untuk mengerti setelah membaca solusi yang diberikan tentunya merupakan hal yang mudah. Hal yang lebih sulit tidak lain dari pada cara berpikir kreatif menyusun langkah langkah pembuktian sehingga memudahkan berkomunikasi secara tertulis. Demikian pula dengan penguasaan teorema yang mengatakan bahwa rataan aritmetika selalu lebih besar dari rataan geometri. Penguasaan ini relatif mudah dibanding dengan kreativitas menggunakan penguasaan teorema yang ada pada persoalan yang dihadapi.

Yang juga tidak kalah pentingnya dalam mempersiapkan peserta didik untuk sukses di dalam tahap selanjutnya adalah perluasan wawasan. Dalam banyak hal, cara, metode, teknik penyelesaian suatu persoalan yang dihadapi dalam olimpiade tidak hanya satu. Berbagai cara berpikir logis dapat saja digunakan. Wawasan yang luas akan membantu dalam memutuskan, cara, metode, dan teknik penyelesaian persoalan.

Penguasaan rataan aritmetika, rataan geometri, rataan harmonik yang mendalam akan sangat membantu dalam menyelesaikan persoalan pertidaksamaan klasik dalam banyak persoalan. Dalam variasi persoalan yang diberikan, mungkin saja kreativitas yang dimiliki peserta didik suatu saat akan menjadi tumpul atau tidak kreatif. Untuk inilah diperlukan perluasan wawasan. Wawasan yang luas akan membantu menyederhanakan persoalan. Sebagaimana dalam contoh penyelesaian pertidaksamaan klasik, wawasan akan penguasaan teorema Muirhead mungkin akan menolong. Sebagaimana dalam solusi solusi soal dalam menyelesaikan persoalan olimpiade, teorema Muirhead sering digunakan dalam menyelesaikan pertidaksamaan klasik. Jadi dengan menguasai teorema Muirhead, teknik penyelesaian sering terlihat cepat dan mudah.

3. Perluasan Wawasan dengan Rataan-a

Untuk suatu vektor Riil $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n)$ didefenisikan suatu Rataan-a dengan simbol $T[\boldsymbol{a}]$ dari suatu bilangan Riil nonnegatif $x_1, \dots, x_n$ sebagai berikut

$$T[\boldsymbol{a}] = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma} x_{\sigma_1}^{a_1} x_{\sigma_2}^{a_2} \dots x_{\sigma_n}^{a_n},$$

dimana notasi jumlah diperluas kepada semua permutasi σ dari $\{1, \dots, n\}$. Dalam kasus $\boldsymbol{a} = (1,0, \dots, 0)$, persamaan di atas hanya merupakan rataan aritmetika biasa dari $x_1, \dots, x_n$. Dalam kasus $\boldsymbol{a} = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$, dengan mudah dapat dilihat persamaan di atas menyatakan rataan geometri dari $x_1, \dots, x_n$.

Teorema Muirhead.

Bila $T[\boldsymbol{a}]$ *mendominasi* $T[\boldsymbol{a}']$ *atau* $T[\boldsymbol{a}] \succ T[\boldsymbol{a}']$ *maka* $T[\boldsymbol{a}] \geq T[\boldsymbol{a}']$.

Bukti dari teorema ini, dapat dilihat pada Lau Chi Hin, 2006.

Contoh 3.

Bila a, b bilangan Riil positif, buktikanlah $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Contoh ini telah dibahas sebelumnya dengan menggunakan sifat sifat kuadrat bilangan Riil. Disini akan dibahas sekali lagi dengan menggunakan teorema Muirhead sebagai pembanding.
Solusi :
Dengan menggunakan teorema Muirhead, pertidaksamaan diatas dapat ditulis

$$\sum_{\sigma} a^2 b^0 \geq \sum_{\sigma} a^1 b^1.$$

Terlihat bahwa pada ruas kiri dapat ditulis $T[2,0]$ yang meliputi (mendominasi) $T[1,1]$ pada ruas kanan, dengan demikian menurut Teorema Muirhead terbuktilah pertidaksamaan diatas.

Contoh 4.

Bila a, b, c bilangan Riil positif, buktikanlah $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

Solusi:
Dengan menggunakan teorema Muirhead, pertidaksamaan diatas dapat ditulis

$$\sum_{\sigma} a^3 b^0 c^0 \geq \sum_{\sigma} a^1 b^1 c^1,$$

yang mana diketahui ruas kiri pertidaksamaan dapat ditulis $T[3,0,0]$ yang meliputi (mendominasi) ruas kanan pertidaksamaan $T[1,1,1]$, sehingga dengan Teorema Muirhead terbuktilah pertidaksamaan di atas.

Contoh 5.

Bila a, b, c bilangan Riil positif dan memenuhi $abc = 1$, buktikan bahwa

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Solusi disini dicari dengan mengalikan kedua ruas persamaan dengan

$$2a^3 b^3 c^3 (a+b)(b+c)(c+a)$$

maka ruas kiri persamaan diperoleh

$$RKiri := 2b^3c^3(a+b)(c+a) + 2a^3c^3(a+b)(c+a) + 2a^3b^3(a+b)(c+a)$$

atau

$$RKiri := 2T[4,3,1] + T[4,4,0] + T[3,3,2].$$

Ruas kanan persamaan menjadi

$$RKanan := 3a^3b^3c^3(a+b)(b+c)(c+a),$$

atau

$$RKanan := 3T[5,4,3] + T[4,4,4].$$

Selanjutnya, kalikan ruas kiri persamaan dengan 1 yaitu $(abc)^{4/3}$ yang tidak merubah nilai pertidaksamaan diperoleh

$$RKiri := 2T\left[\tfrac{16}{3}, \tfrac{13}{3}, \tfrac{7}{3}\right] + T\left[\tfrac{16}{3}, \tfrac{16}{3}, \tfrac{4}{3}\right] + T\left[\tfrac{13}{3}, \tfrac{13}{3}, \tfrac{10}{3}\right].$$

Dengan memperhatikan hubungan

$$T\left[\tfrac{16}{3}, \tfrac{13}{3}, \tfrac{7}{3}\right] \geq T[5,4,3],$$

$$T\left[\tfrac{16}{3}, \tfrac{16}{3}, \tfrac{4}{3}\right] \geq T[5,4,3],$$

dan

$$T\left[\tfrac{13}{3}, \tfrac{13}{3}, \tfrac{10}{3}\right] \geq T[4,4,4],$$

maka terbuktilah

$$2T\left[\tfrac{16}{3}, \tfrac{13}{3}, \tfrac{7}{3}\right] + T\left[\tfrac{16}{3}, \tfrac{16}{3}, \tfrac{4}{3}\right] + T\left[\tfrac{13}{3}, \tfrac{13}{3}, \tfrac{10}{3}\right] \geq 3T[5,4,3] + T[4,4,4].$$

Dengan demikian menurut Teorema Muirhead sekali lagi terbuktilah pertidaksamaan di atas.

Peluasan wawasan, tentunya bukan hanya pada salah satu bidang ilmu saja melainkan harusnya keseluruhan bidang ilmu yang dilombakan dalam olimpiade. Contoh perluasan wawasan dalam bidang aljabar diatas hanyalah merupakan contoh agar mutu dan kemampuan peserta didik yang dipersiapkan senantiasa dapat melalui tahapan seleksi yang diinginkan.

Daftar Pustaka

[1] Lau Chi Hin, 2006, Muirhead's inequality, *Mathematical Excalibur*, Volume 11, Number 1.

[2] Matic dan Ivan, 2007, Classical inequalities, *Olympiad Training Materials*, IMO compendium group.

[3] Sembiring dan Suwah, 2002, *Olimpiade Matematika untuk SMA*, Yrama Widya, Bandung.